Anales de la Real Academia de Doctores de España
Volumen 10, pp. 85-89, 2006

UN MÉTODO DE SIMULACIÓN PARA LA MIXTURA DE LEYES

DARIUSH GHORBANZADEH
FRANCISCO JAVIER DÍAZ-LLANOS SÁINZ-CALLEJA

RESUMEN

El objetivo de este artículo es presentar un método de simulación para la mixtura de leyes. Este método está basado en el método de inversión y es aplicable en el cual nosotros tengamos leyes cuyas funciones de distribución inversas (recíprocas) tiene una expresión explícita.

METODOLOGÍA

Sea X una variable aleatoria cuya ley admite la densidad

$$f(x) = \sum_{i=1}^{K} \theta_i \, f_i(x) \qquad (1)$$

donde para i=1,...,K,,0 < θ_i < 1 *y* $\theta_1+...+\theta_K=1$, $f_1,...,f_K$

son densidades de probabilidad de funciones de distribución

$F_1,...,F_K$

Llamamos $F_1^{-1},..., F_K^{-1}$ *las funciones inversas (o recíprocas) de*

$F_1,...,F_K$. (2) y (3)

Para simular X tendremos en cuenta la proposición siguiente:

(4) y (5)

Proposición. Sea U una variable aleatoria de ley uniforme **U([0,1])**. Entonces, la variable aleatoria X definida por

$$X = \begin{cases} F_1^{-1}\left(\dfrac{U}{\theta_1}\right) & si\ 0 \le U < \theta_1 \\ F_2^{-1}\left(\dfrac{U-\theta_1}{\theta_2}\right) & si\ \theta_1 \le U < \theta_1+\theta_2 \\ \\ F_i^{-1}\left(\dfrac{U-\theta_1-..-\theta_{i-1}}{\theta_i}\right) & si\ \theta_1+...+\theta_{i-1} \le U < \theta_1+...+\theta_i \\ F_K^{-1}\left(\dfrac{U-\theta_1-...-\theta_{K-1}}{\theta_K}\right) & si\ \theta_1+...+\theta_{K-1} \le U < 1 \end{cases}$$

tiene por densidad f dada por (1).

Demostración. Para toda función h continua en un soporte compacto tenemos:

$$E\left[h(X)\right] = \sum_{i=1}^{K} \int_{\theta_1+...+\theta_{i-1}}^{\theta_1+...+\theta_i} h\left(F_i^{-1}\left(\frac{u-\theta_1-...-\theta_{i-1}}{\theta_i}\right)\right) du \qquad (2)$$

Efectuando el cambio de variable

$$x = F_i^{-1}\left(\frac{u-\theta_1-...-\theta_{i-1}}{\theta_i}\right)$$

obtenemos:

$$u = \theta_1 + ... + \theta_{i-1} + \theta_i\, F_i\,(x)$$

de donde du = $\theta_i\, f_i\,(x)\, dx$. *Sustituyendo en* (2) *este resultado, obtenemos:*

$$E\left[h(X)\right] = \sum_{i=1}^{K} \int_{-\infty}^{+\infty} h\,(x)\,\theta_i\, f_i\,(x)\,dx$$

Ejercicio práctico:

Sea X una variable aleatoria cuya ley admite la densidad:

$$g_{a,\lambda}(x) = \begin{cases} \dfrac{X+\sqrt{a+\lambda^2}}{a} & si \quad -\sqrt{a+\lambda^2} \le x \le -\lambda \\[2ex] \dfrac{-\lambda+\sqrt{a+\lambda^2}}{a} & si \quad -\lambda \le x \le \lambda \\[2ex] \dfrac{\sqrt{a+\lambda^2}-x}{a} & si \quad \lambda \le x \le \sqrt{a+\lambda^2} \end{cases}$$

donde $a > 0$ *y* $\lambda > 0$. $g_{a,\lambda}(x)$ *puede escribirse bajo la forma:*

$$g_{a,\lambda}(x) = \frac{\left(\sqrt{a+\lambda^2}-\lambda\right)^2}{2a} f_1(x) + \frac{2\lambda\left(\sqrt{a+\lambda^2}-\lambda\right)}{a} f_2(x) + \frac{\left(\sqrt{a+\lambda^2}-\lambda\right)^2}{2a} f_3(x)$$

con

$$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{2\left(x+\sqrt{a+\lambda^2}\right)}{\left(\sqrt{a+\lambda^2}-\lambda\right)^2} \mathrm{I}_{\left[-\sqrt{a+\lambda^2},-\lambda\right]}(x) \\[2ex] f_2(x) = \dfrac{1}{2\lambda} \mathrm{I}_{[-\lambda,\lambda]}(x) \\[2ex] f_3(x) = \dfrac{2\left(\sqrt{a+\lambda^2}-x\right)}{\left(\sqrt{a+\lambda^2}-\lambda\right)^2} \mathrm{I}_{\left[\lambda,\sqrt{a+\lambda^2}\right]}(x) \end{cases}$$

Las funciones de distribución correspondientes están dadas por:

$$\begin{cases} F_1(x) = \left(\dfrac{x+\sqrt{a+\lambda^2}}{\sqrt{a+\lambda^2}-\lambda}\right)^2 \\[2ex] F_2(x) = \dfrac{x+\lambda}{2\lambda} \\[2ex] F_3(x) = 1-\left(\dfrac{\sqrt{a+\lambda^2}-x}{\sqrt{a+\lambda^2}-\lambda}\right)^2 \end{cases}$$

De dicho resultado deducimos que:

$$F_1^{-1}(U) = -\sqrt{a+\lambda^2} + (\sqrt{a+\lambda^2} - \lambda)\,\sqrt{U}$$

$$F_2^{-1}(U) = \lambda\,(2U-1)$$

$$F_3^{-1}(U) = -\sqrt{a+\lambda^2} - (\sqrt{a+\lambda^2} - \lambda)\,\sqrt{1-U}$$

Observamos que

$$\lim_{\lambda\to 0^+} g_{a,\lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(1-\frac{|x|}{\sqrt{a}}\right)\mathrm{I}_{[-\sqrt{a},\,\sqrt{a}]}(x)$$

es la densidad de la ley triangular sobre el intervalo $\left[-\sqrt{a},\sqrt{a}\right]$

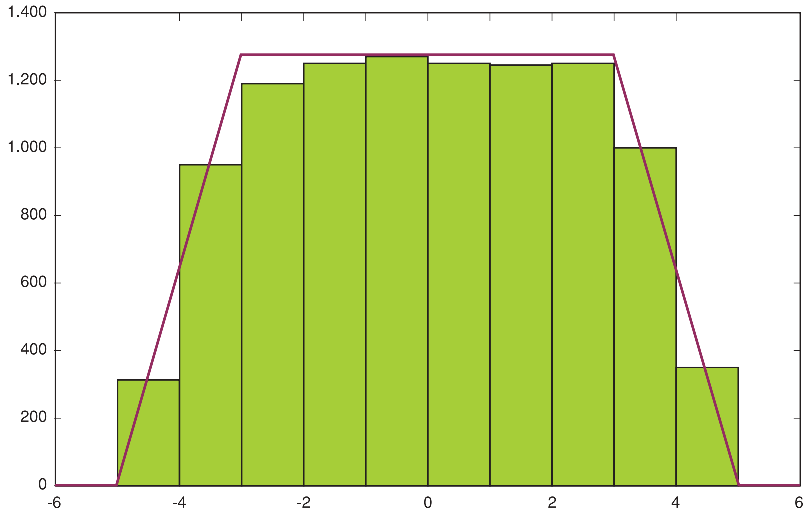

Figura 1. *Simulación para $a = 16$ y $\lambda = 3$.*

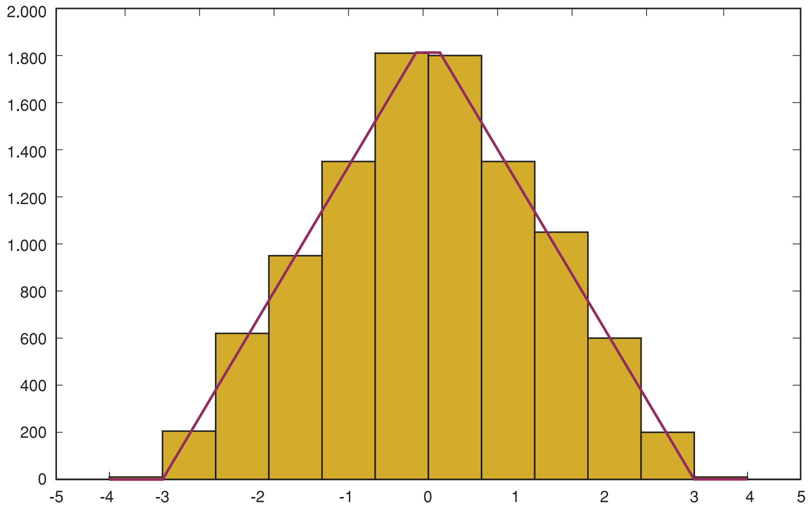

Figura 2. *Simulación para* $a = 9$ *y* $\lambda = 0.1$.

BIBLIOGRAFÍA

(1) Deroye, L. (1986): *Non-uniform Random Variate Generation*. Springer-Verlag, New York.

(2) Ghorbanzadeh, D. (1998): *Probabilités. Exercices corrigés*. Éditions Technip, Paris.

(3) Knuth, D. E. (1981): The Art of Computer Programing, Vol. 2: *Seminumerical Algorithms*. Addison-Wesley, Reading, MA.

(4) Law, A. M. and Kelton (1991): *Simulation Modelling and Analysis*. McGraw-Hill. New York, 2nd edition.

(5) Ros, S. M. (1996): *Simulation*. Academic Press, 2nd edition.